



Analiza omrežij

6. Zgradba omrežij otoki in gruče

Vladimir Batagelj

Magistrski program Uporabna statistika
Ljubljana, maj2020



Kazalo

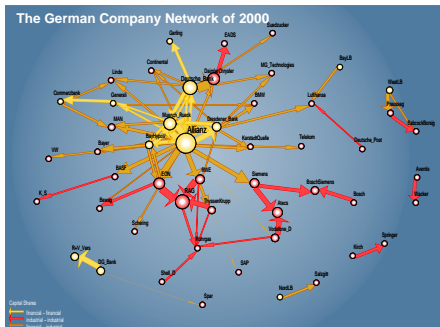
Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- 1 Otoki
- 2 Gruče



L. Krempf, MPI.

prof. Vladimir Batagelj: vladimir.batagelj@fmf.uni-lj.si
prosojnice (PDF)

7. maj 2020 ob 00:24/ april 2013



Otoki

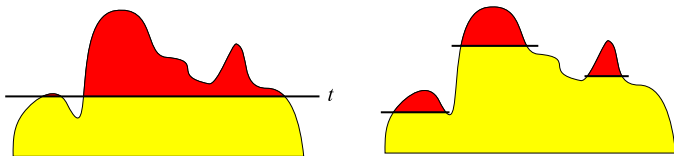
Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Če dano lastnost/utež vozlišč/povezav predstavimo kot njihovo višino, nam naše omrežje določa nekakšno pokrajino s hribi in dolinami. Če to pokrajino potopimo v vodo do izbrane višine, dobimo kot izrez *otoke*. S spreminjanjem višine vode dobivamo različne otoke. V uporabah nas običajno zanimajo ne preveliki in ne premajhni otoki – le otoki velikosti med izbranimi k in K . Postopek 'otoki' začne s pokrajino popolnoma potopljeno v vodo. Nato znižujemo višino, dokler se ne pojavi otok prave velikosti ...



Otoki so zelo splošen in učinkovit postopek za določanje 'pomembnih' podomrežij v danem omrežju.



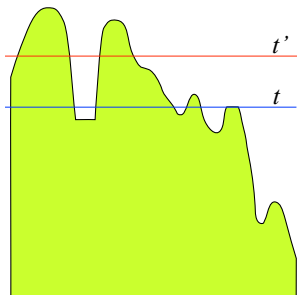
... otoki

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, p)$, $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo **pravi vozliščni otok** skupino vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, ki poraja povezan podgraf in so vozlišča v skupini 'višje' od sosednjih vozlišč

$$\max_{u \in N(\mathcal{C})} p(u) < \min_{v \in \mathcal{C}} p(v)$$

V omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, w)$, $w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo **pravi povezavni otok** skupino vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, ki poraja povezan podgraf in so vozlišča v skupini 'močnejše' povezana, kot s sosedi – v podgrafu porojenem s \mathcal{C} obstaja vpeto drevo \mathcal{T} , tako da je

$$\max_{(u,v) \in \mathcal{L}, u \notin \mathcal{C}, v \in \mathcal{C}} w(u,v) < \min_{(u,v) \in \mathcal{T}} w(u,v)$$

Vpeljemo lahko tudi pojem **enostavnih** otokov z enim samim 'vrhom'.



Lastnosti vozliščnih otokov

- Množica vozlišč posamezne komponente vozliščnega izreza na izbrani ravni t določa pravi vozliščni otok.
- Množica $\mathcal{H}_p(\mathcal{N})$ vseh vozliščnih otokov omrežja \mathcal{N} je polna razslojitev:
 - otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem;
 - vsako vozlišče pripada vsaj enemu otoku.
- Vozliščni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije lastnosti p .
- Krajišči iste povezave ne moreta pripadati dvem različnima otokoma.



Postopek za določanje vozliščnih otokov

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže novo vozlišče v iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezano.
- Vozlišče v in z njim povezane otoke združimo v nov, večji otok. Otoki, ki so pri tem združeni, so njegovi podotoki. Vozlišče v je pristanišče novega otoka (vozlišče z najmanjšo vrednostjo).
- To je mogoče izvesti v času $\mathcal{O}(\max(n \log n, m))$.

Operations/Network+Vector/Islands/Vertex Property



Enostavni vozliščni otoki

- Množica vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ je (lokalni) **vozliščni vrh**, če je pravi vozliščni otok in imajo vsa njegova vozlišča isto vrednost.
- Vozliščni otok je **enostaven**, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste vozliščnih otokov:
 - PLOSKI – vsa njegova vozlišča imajo isto vrednost;
 - ENOVRŠNI – otok ima en sam vrh;
 - VEČVRŠNI – otok ima več vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.



Lastnosti povezavnih otokov

- Množice vozlišč povezanih komponent povezavnega izreza na izbrani ravni t so pravi povezavni otoki.
- Množica $\mathcal{H}_w(\mathcal{N})$ vseh pravih povezavnih otokov omrežja \mathcal{N} je razslojitev (ne nujno polna):
 - dva otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem.
- Povezavni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije uteži w .
- Krajišči povezave lahko pripadata dvema ločenima pravima povezavnima otokoma.



Algoritem določitve pravih povezavnih otokov

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže nova povezava e iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezana (obstajata največ dva).
- Združimo ta otoka s povezavo ali dodamo povezavo otoku. Dobimo večji otok. Združeni otoki so podotoki tega otoka. Povezava e je *pristanišče* novega otoka (najmanjša vrednost v minimalnem vpetem drevesu).
- Prave povezavne otoke je mogoče določiti v času $\mathcal{O}(m \log n)$.

Network/Create Partition/Islands/Line Weights



Enostavni povezavni otoki

- Množica vozlišč $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ določa *povezavni vrh*, če je pravi povezavni otok, ki vsebuje minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku.
- Povezavni otok je *enostaven*, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste povezavnih otokov:
 - PLOSKI – minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku;
 - ENOVRŠNI – otok ima en sam povezavni vrh;
 - VEČVRŠNI – otok ima več povezavnih vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.



Primer: Ameriški patenti

Omrežje ameriških patentov (**Nber, US Patents**) ima 3774768 vozlišč in 16522438 usmerjenih povezav (1 zanka). Če zanko odstranimo, je omrežje aciklično. Za uteži povezav smo vzeli delež različnih poti od začetkov do koncev, ki vodijo skozi povezavo in določili vse (2,90)-otoke. Z otoki porojeno omrežje ima 470137 vozlišč, 307472 povezav in za različne k : $C_2 = 187610$, $C_5 = 8859$, $C_{30} = 101$, $C_{50} = 30$ otokov. **Rolex**

[1]	0	139793	29670	9288	3966	1827	997	578	362	250
[11]	190	125	104	71	47	37	36	33	21	23
[21]	17	16	8	7	13	10	10	5	5	5
[31]	12	3	7	3	3	3	2	6	6	2
[41]	1	3	4	1	5	2	1	1	1	1
[51]	2	3	3	2	0	0	0	0	0	1
[61]	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0
[71]	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
[81]	2	0	0	0	0	1	2	0	0	7



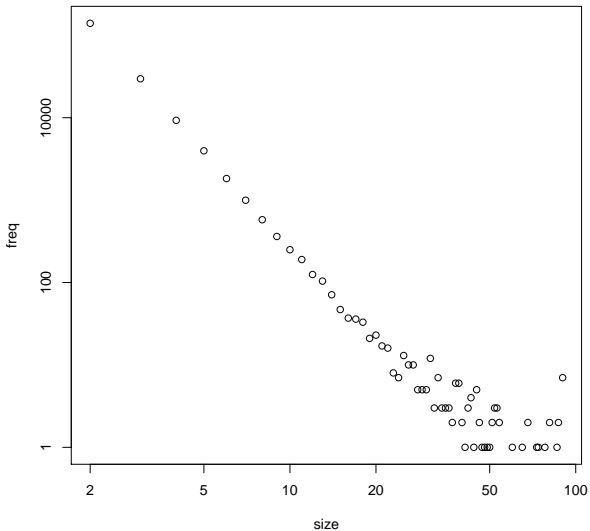
Porazdelitev velikosti otokov

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij



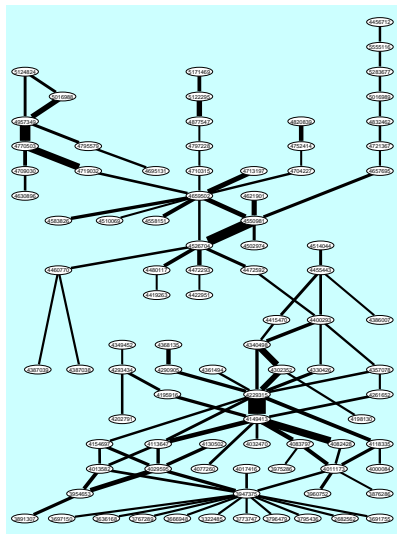
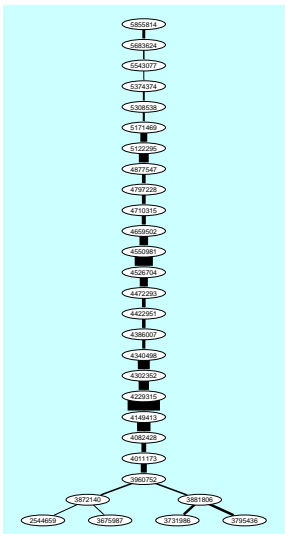
Glavna pot in glavni otok v US Patents

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij





Glavni tokovi Liquid crystal display

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki
Gruče

Table 1: Patents on the liquid-crystal display

patent	date	author(s) and title
1748699	Mar 14, 1994	Yoshio. Liquid crystal wide-pitching sheet and the two-step fabrication and use thereof
2082862	Jun 29, 1954	Winder, et al. Reduction of aromatic carbonds
3322880	May 30, 1967	Williams. Electro-optical elements utilizing an organic nematic compound
3036108	Jan 18, 1972	Josephson. Preparation of polycrystal aromatic compounds
3093988	May 30, 1972	McLennan, et al. Liquid crystal normal imaging system
3077087	Jul 11, 1972	Rubins. Liquid crystal composition and device
3091755	Sep 19, 1972	Gizard. Check with digital display
3091750	Oct 10, 1972	Wyszocki. Electro-optic systems in which an electrophoretic or display material is dispersed throughout a liquid crystal to reduce the turn-on time
3371996	May 8, 1973	Ferguson. Display device utilizing liquid crystal light modulation
3378280	Oct 23, 1973	Astruc, et al. Class of stable trans-stilbene compounds, some displaying nematic mesophases at or near room temperature and others in a range up to 100°C
3737347	Nov 20, 1973	Solomonstern. Substituted azoxy benzene compounds
3795426	Mar 5, 1974	Buller, et al. Nematic material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperatures
3796473	Mar 12, 1974	Hoffrich, et al. Electro-optical light modulation cell utilizing a nematic material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperatures
3821410	May 18, 1975	Kandamann, et al. Liquid crystalline compositions and method
3926296	Apr 1, 1976	Dreier, et al. Use of smectic liquid crystalline substances
3901896	May 6, 1976	Suzuki. Electro-optical display device
3901387	Jun 24, 1976	Tokimoto, et al. Phase control of the voltage applied to electrode electrodes for a cholesteric to smectic phase transition display
3947375	Mar 30, 1976	Gray, et al. Liquid crystal materials and devices
3954653	May 4, 1976	Wiederlich. Liquid crystal composition having high dielectric anisotropy and display device incorporating same
3907762	Jun 1, 1976	Oh, et al. Liquid crystal compositions
3975286	Aug 17, 1976	Oh. Low voltage actuated field effect liquid crystals compositions and method of synthesis
4000884	Dec 28, 1976	Hsieh, et al. Liquid crystal mixtures for electro-optical display devices
4011173	Mar 8, 1977	Shimohara. Modified nematic mixtures with positive dielectric anisotropy
4013362	Mar 22, 1977	Shimohara. Liquid crystal compositions and electro-optic devices incorporating them
4017416	Apr 12, 1977	Shimohara. Liquid crystalline 4-alkyl-4'-hydroxybenzoates, method for preparing same and liquid crystal compositions incorporating them
4025995	Jun 14, 1977	Bliss, et al. Novel liquid crystal compounds and electro-optic devices incorporating them
4032470	Jun 28, 1977	Rosen, et al. Electro-optic device
4037289	Mar 7, 1979	Gray, et al. Optically active cyano-biphenyl compounds and liquid crystal materials containing them
4082328	Apr 4, 1979	Hsu. Liquid crystal composition and method

Table 2: Patents on the liquid-crystal display

patent	date	author(s) and title
4082996	Apr 14, 1979	U.S. Nematic liquid crystal compositions
4113847	Sep 12, 1978	Edwards, et al. Liquid crystalline materials
4118232	Oct 3, 1978	Kucenas, et al. Liquid crystalline materials of reduced viscosity
4130262	Dec 19, 1978	Edwards, et al. Liquid crystalline cyclohexane derivatives
4149413	Apr 17, 1979	Gray, et al. Optically active liquid crystal mixtures and liquid crystal devices containing them
4154807	May 15, 1979	Edwards, et al. Liquid crystalline benzylidenebiphenyl derivatives
4192916	Apr 1, 1979	Couture, et al. Liquid crystal mixtures
4198120	Apr 15, 1980	Bolter, et al. Liquid crystal mixtures
4202710	Oct 21, 1980	Sato, et al. Nematic liquid crystalline materials
4229215	Oct 21, 1980	Kucenas, et al. Liquid crystalline cyclohexane derivatives
4263652	Apr 14, 1981	Gray, et al. Liquid crystal compounds and materials and device containing them
4290905	Sep 22, 1981	Kashe. Ester compound
4293434	Oct 6, 1981	Dreier, et al. Liquid crystal compounds
4323252	Nov 24, 1981	Edwards, et al. Fluorophenylcyclohexanones, the preparation thereof and their use as components of liquid crystal dielectrics
4330426	May 18, 1982	Edwards, et al. Cyclohexylbiphenyls, their preparation and use in dielectric and electro-optical display elements
4340498	Jul 20, 1982	Sagmunt. Halogenated ester derivatives
4349452	Oct 14, 1982	Oman, et al. Cyclohexylcyclohexanones
4352785	Nov 2, 1982	Carr, et al. Liquid crystal compounds containing an alkylic ring and exhibiting a low dielectric anisotropy and liquid crystal materials and devices incorporating such compounds
4363494	Nov 30, 1982	Oman, et al. Anisotropic cyclohexyl cyclohexylbiphenyl ethers
4366132	Jan 13, 1983	Oman, et al. Anisotropic compounds with negative or positive D ₃₃ -anisotropy and low optical anisotropy
4382607	May 31, 1983	Kucenas, et al. Liquid crystalline cyclohexane derivatives
4387038	Jun 7, 1983	Fukui, et al. 4-(trans-4'-alkylalkoxy) benzoic acid 4'-cyanobiphenyl esters
4387039	Jun 7, 1983	Hogner, et al. Trans-4-(trans-4'-alkylalkoxy)cyclohexyl cyclohexane derivatives and 4'-cyanobiphenyl derivatives
4415470	Nov 15, 1983	Edwards, et al. Liquid crystalline fluorine-containing cyclohexylbiphenyls and dielectric and electro-optical display elements based thereon
4419383	Dec 6, 1983	Prud'homme, et al. Liquid crystalline cyclohexylcyclohexanone derivatives
4422951	Dec 27, 1983	Edwards, et al. Liquid crystal benzene derivatives
4454343	Jun 19, 1984	Faloutsos, et al. Nematic liquid crystal
4456712	Jun 26, 1984	Couture, et al. Nematic liquid crystal composition
4460778	Jul 17, 1984	Petrillia, et al. Liquid crystal mixture
4457283	Sep 18, 1984	Sagmunt. Liquid crystal composition containing the same of high range and liquid crystal compositions containing the same
4472292	Sep 18, 1984	Edwards, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4480117	Oct 30, 1984	Faloutsos, et al. Novel liquid crystalline compounds
4502074	Mar 5, 1985	Sagmunt, et al. High temperature liquid-crystalline ester compounds
4510809	Apr 9, 1985	Edwards, et al. Cyclohexane derivatives

Table 3: Patents on the liquid-crystal display

patent	date	author(s) and title
4518911	Apr 30, 1985	Petrillia, et al. 11-trans-4'-alkyl-4-cyano-1,1'-bis(2-(2-ethyl-1-p-methyl-phenyl)cyclohexyl)ethane and liquid crystal mixtures
4537874	Jul 2, 1985	Petrillia, et al. Multilayer liquid crystal mixtures
4550981	Nov 5, 1985	Petrillia, et al. Liquid crystalline esters and mixtures
4582823	Dec 10, 1985	Takano, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4593828	Apr 22, 1986	Petrillia, et al. Phenylbenzenes
4593831	Nov 11, 1986	Petrillia, et al. Novel liquid crystal mixtures
4638988	Dec 23, 1986	Petrillia, et al. Benzocyclobutenes
4657009	Apr 14, 1987	Sato, et al. Substituted pyridines
4659262	Apr 21, 1987	Fusma, et al. Ethane derivatives
4691513	Sep 22, 1987	Kimura, et al. Dimethylated ethanes and their use in liquid crystal materials and devices
4704227	Nov 3, 1987	Kucenas, et al. Liquid crystal compounds
4709038	Nov 24, 1987	Petrillia, et al. Novel liquid crystal mixtures
4710331	Dec 1, 1987	Schadt, et al. Anisotropic compounds and liquid crystal systems therefor
4713197	Dec 15, 1987	Edwards, et al. Nitrogen-containing heterocyclic compounds
4719022	Jan 12, 1988	Wachtler, et al. Cyclohexane derivatives
4721367	Jan 26, 1988	Voshnag, et al. Liquid crystal device
4724141	Jan 21, 1988	Edwards, et al. Nitrogen-containing heterocyclic compounds
4757953	Sep 13, 1988	Buchdler, et al. Liquid crystalline compounds
4790599	Jan 3, 1989	Vander, et al. 2,2'-difluoro-4-alkoxy-4'-hydroxybiphenyls and their derivatives, their production process and their use in liquid crystal display devices
4807828	Jan 30, 1989	Gray, et al. Cyclohexane derivatives and liquid crystal compositions containing same
4829378	Apr 11, 1989	Kucenas, et al. Nitrogen-containing heterocyclic esters
4832462	May 23, 1989	Clark, et al. Liquid crystal material
4877447	Feb 21, 1989	Weller, et al. Liquid crystal display element
4877349	Sep 18, 1989	Chee, et al. Active matrix screen for the color display of bistable pictures, control system and process for producing said screen
4905998	May 21, 1991	Bauer. Liquid crystal display device with a liquid-crystal compensator
5002899	May 21, 1991	Prigler. Liquid crystal element with improved contrast and brightness
5122299	Jan 16, 1992	Weller, et al. Matrix liquid crystal display
5128428	Feb 19, 1992	Kozaki, et al. Liquid crystal display device comprising a retardation compensation layer having a maximum principal retardation axis in the same direction
5147493	Dec 15, 1992	Hirak, et al. Liquid-crystal material
5148275	Feb 11, 1993	Hirak, et al. Liquid-crystal display with great retardation between terminal group
5208238	Mar 2, 1994	Weller, et al. Superwhite liquid-crystal display
5237474	Dec 20, 1994	Weller, et al. Superwhite liquid-crystal display
5248207	Aug 6, 1996	Dager, et al. Nematic liquid-crystal composition
5551518	Sep 10, 1996	Edwards, et al. Liquid crystalline compound
5606264	Nov 4, 1997	Marfat, et al. Liquid crystal compositions and liquid crystal display elements
5655844	Nov 4, 1999	

V. Batagelj

Analiza omrežij





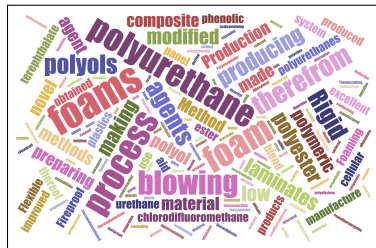
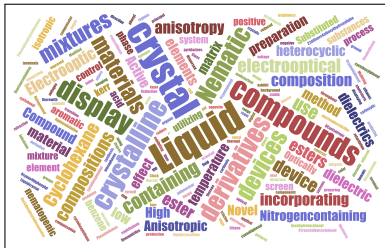
Besedna oblaka za otok "LCD" in otok "foam"

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

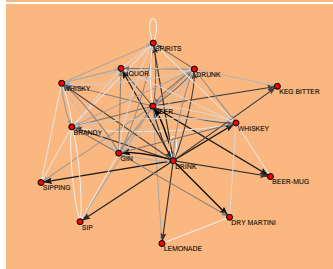
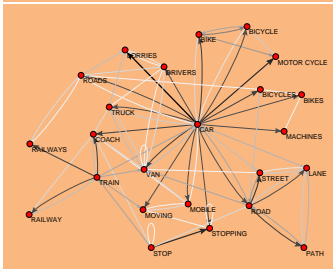
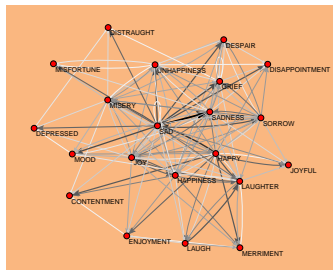
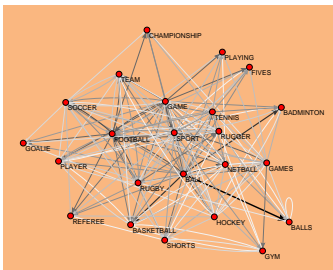
$n = 23219$, $m = 325624$, tranzitivnostna utež

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij



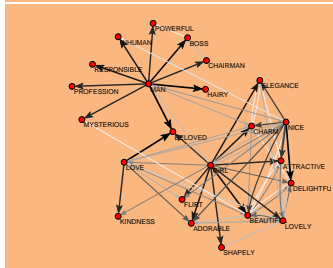
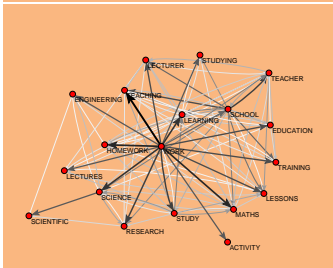
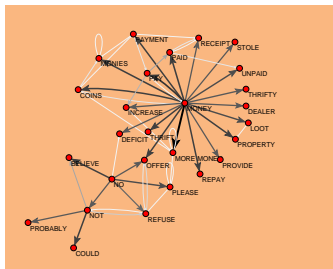
... Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





Gruče

Predlaganih je bilo več pojmov, ki opisujejo zgoščene skupine ali gruče v omrežjih.

Klika reda k v grafu je maksimalni polni (izomorfen K_k) podgraf, $k \geq 3$.

s-klika je maksimalni podgraf \mathcal{H} , v katerem najkrajša pot med poljubnima njenima vozliščema ne presega s .

$$\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d(u, v) \leq s.$$

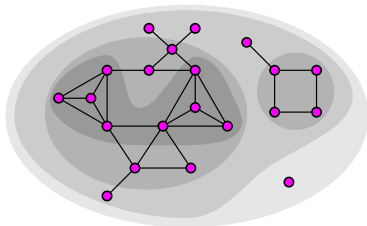
s-klan je s-klika s premerom s . $\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d_{\mathcal{H}}(u, v) \leq s$.

s-pleksi, množice LS, množice lambda, sredice, ...

Za vse, razen za sredice, se je pokazalo, da jih je težko določiti.



Sredice in posplošene sredice



Pojem sredice je vpeljal Seidman leta 1983. Podgraf $\mathcal{H} = (\mathcal{W}, \mathcal{L}(\mathcal{W}))$ grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ porojen z množico \mathcal{W} je *k-sredica* ali *sredica reda k* ntk. $\forall v \in \mathcal{W} : \deg_{\mathcal{H}}(v) \geq k$ in je \mathcal{H} maksimalni podgraf s to lastnostjo.

Sredici največjega reda v grafu pravimo tudi *glavna* sredica.

Sredičnost vozlišča v je enaka največjemu redu sredice, ki še vsebuje to vozlišče.

Stopnja $\deg(v)$ v definiciji sredice je lahko: vhodna, izhodna, celotna, itd., kar da različne vrste sredic.



Lastnosti sredic

S slike na prejšnji prosojnici, ki prikazuje sredice redov 0, 1, 2 in 3, vidimo:

- Sredice so gnezdene – določajo razslojitev:
$$i < j \implies \mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}_i$$
- Sredice danega reda niso vselej povezani podgrafi.

Učinkovit postopek za določitev sredic temelji na lastnosti:

Če iz danega grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ zaporedoma odstranjujemo vsa vozlišča (in pripadajoče povezave), ki imajo stopnjo manjšo od k , bo podgraf, ki bo ostal, sredica reda k .



Postopek določanja sredic

Input: Graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ predstavljen s seznanji sosedov

Output: Tabela $core[\mathcal{V}]$ sredičnosti vozlišč

Določi stopnje vozlišč $degree$

Uredi množico vozlišč \mathcal{V} v naraščajočem vrstnem redu njihovih stopenj

for $v \in \mathcal{V}$ glede na tekočo urejenost **do**

$core[v] = degree[v]$

for $u \in N(v)$ **do**

if $degree[u] > degree[v]$ **then**

$degree[u] = degree[u] - 1$

$\mathcal{V} = \mathcal{V} \setminus \{v\}$; Preuredi \mathcal{V}



... postopek določanja sredic

Pri razdelavi postopka je potrebno poskrbeti za hitro urejanje tabele *degree* in njeno preurejanje. Ker so vrednosti stopenj med 0 in $n - 1$ lahko s postopkom 'kupčkanja' to naredimo v času $O(n)$; urejenost lahko popravljamo v konstantnem času. Celoten postopek lahko izvedemo v času $O(m)$.

Sredice so eden od redkih učinkovitih pristopov za določanje gostih delov grafa. Uporabimo jih lahko tudi za pohitritve drugih, zahtevnejših postopkov saj so na primer k -komponente in klike reda k vsebovane v sredici reda k . Velja tudi naslednja ocena za barvnost grafa \mathcal{G}

$$\chi(\mathcal{G}) \leq 1 + \text{core}(\mathcal{G})$$



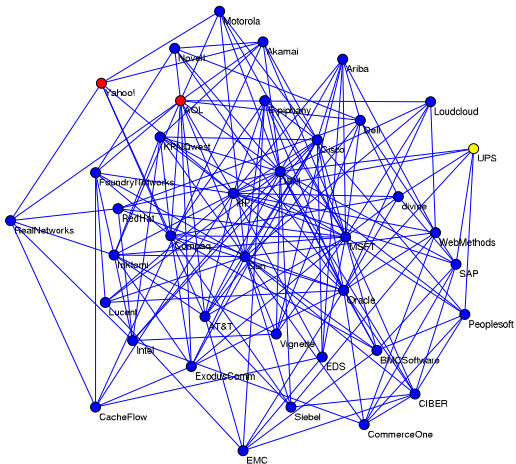
Sredica reda 6 za Krebsova Internetna podjetja

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





Posplošene sredice

Pojem sredice lahko posplošimo na omrežja. Naj bo \mathcal{N} omrežje nad grafom $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$. Privzemimo, da imamo na \mathcal{N} določeno funkcijo $p(v, \mathcal{U})$, $v \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ z realnimi vrednostmi – *p-funkcija*.

Označimo $N_{\mathcal{U}}(v) = N(v) \cap \mathcal{U}$. Poleg stopenj so *p*-funkcije npr. še:

$$p_S(v, \mathcal{U}) = \sum_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$p_M(v, \mathcal{U}) = \max_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_t(v, \mathcal{U}) = \frac{|\mathcal{L}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}(K(N^+(v)))|}{|\mathcal{L}(K(N^+(v)))|}$$

$$p_k(v, \mathcal{U}) = \text{število ciklov dolžine } k \text{ skozi vozlišče } v \text{ v } (\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{U}))$$

Podgraf $\mathcal{H} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}(\mathcal{C}))$ porojen z množico $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ je *p-sredica* na ravni $t \in \mathbb{R}$ ntk. $\forall v \in \mathcal{C} : t \leq p(v, \mathcal{C})$ in je \mathcal{C} maksimalna taka množica.



Še nekaj p -funkcij

relativna gostota

$$p_\gamma(v, \mathcal{C}) = \frac{\deg(v, \mathcal{C})}{\max_{u \in N(v)} \deg(u)}, \text{ če je } \deg(v) > 0; 0, \text{ sicer}$$

raznolikost

$$p_\delta(v, \mathcal{C}) = \max_{u \in N^+(v, \mathcal{C})} \deg(u) - \min_{u \in N^+(v, \mathcal{C})} \deg(u)$$

povprečna utež

$$p_a(v, \mathcal{C}) = \frac{1}{|N(v, \mathcal{C})|} \sum_{u \in N(v, \mathcal{C})} w(v, u), \text{ če je } N(v, \mathcal{C}) \neq \emptyset; 0, \text{ sicer}$$



Postopek za posplošene sredice

Funkcija p je *monotona* ntk. zanjo velja

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{V} : (p(v, \mathcal{C}_1) \leq p(v, \mathcal{C}_2))$$

Stopnje in funkcije p_S , p_M , p_t ter p_k so monotone.

Za monotone funkcije lahko ustrezno p -sredico na ravni t določimo, kot pri navadnih sredicah, z zaporednim odmetavanjem vozlišč z vrednostjo p manjšo od t . Sredice na različnih ravneh so gnezdene

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{t_2} \subseteq \mathcal{H}_{t_1}$$

p -funkcija je *lokalna* ntk. $p(v, \mathcal{U}) = p(v, N_{\mathcal{U}}(v))$.

Stopnje, p_S , p_M in p_t so lokalne; toda p_k **ni** lokalna za $k \geq 4$. Za lokalno p -funkcijo obstaja postopek reda $O(m \max(\Delta, \log n))$ za določitev razslojitve na p -sredice, če le lahko $p(v, N_C(v))$ določimo v času $O(\deg_C(v))$.



Omrežje sodelovanj GeomBib

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Iz B. Jones-ove bibliografije računalniške geometrije *Computational geometry database* (2002), *FTP*, *Geom.net*. smo sestavili omrežje sodelovanj. Avtorja določata povezavo, če sta napisala skupno delo. Utež povezave je enaka številu skupnih del.

To omrežje je zahtevalo veliko 'čiščenja' zaradi težav z razpoznavanjem posameznih avtorjev. Tako na primer: Pankaj K. Agarwal, P. Agarwal, Pankaj Agarwal in P.K. Agarwal določajo isto osebo.

$$n = 9072, m = 13567/22577 \rightarrow n' = 7343, m' = 11898.$$



Sredice in posplošene sredice / ukazi Pajek

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

```
File/Network/Read [Geom.net]
Network/Create Partition/k-Core/All
Info/Partition
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [13-*]
Draw/Network+First Partition
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Options/Values of lines/Similarities
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [21]
Draw/Network
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Options/Values of lines/Forget
Layout/Energy/Kamada-Kawai
[select Geom.net]
Network/Create Vector/Generalized Cores/Sum/All
Info/Vector
Vector/Make Partition/by Intervals/Selected Thresholds [45]
Info/Partition
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [2]
Draw/Network
Options/Values of lines/Similarities
Layout/Energy/Fruchterman-Reingold
```



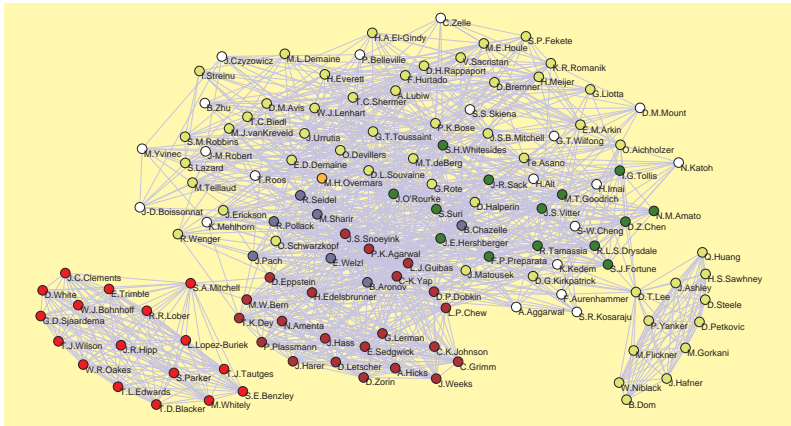
Navadne sredice redov 10–21 v Computational Geometry

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





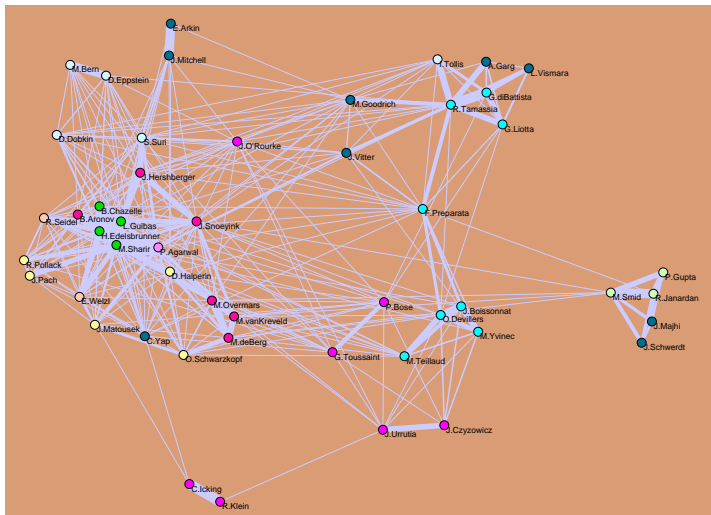
p_5 -sredica na ravni 46 v Computational Geometry

Analiza
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij