# Analiza omrežij

5. Zgradba omrežij
povezanosti

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani, FMF, matematika

Interdisciplinarni doktorski študijski program Statistika
Ljubljana, april 2014

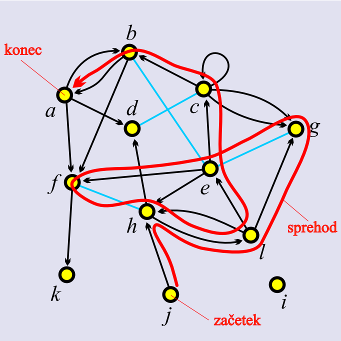
# Kazalo




London Tube

wiki: http://pajek.imfm.si/doku.php?id=event:pd
April 14, 2014/ marec 2013

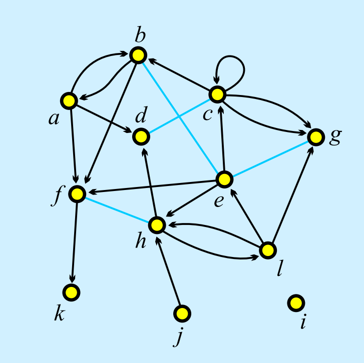
# Sprehodi




*dolžina* $|s|$ sprehoda $s$ je število povezav, ki ga sestavljajo.
$s = (j, h, l, g, e, f, h, l, e, c, b, a)$
$|s| = 11$
Sprehod je *sklenjen* ali *obhod* ntk. njegov začetek in konec sovpadata.
Če ne upoštevamo smeri povezav v 'sprehodu', dobimo *polsprehod* ali *verigo*.
*sled* – sprehod z različnimi povezavami
*pot* – sprehod z različnimi vozlišči
*cikel* – sklenjen sprehod z različnimi notranjimi vozlišči.

Graf je *acikličen*, ntk. ne vsebuje nobenega cikla.

# Najkrajše poti

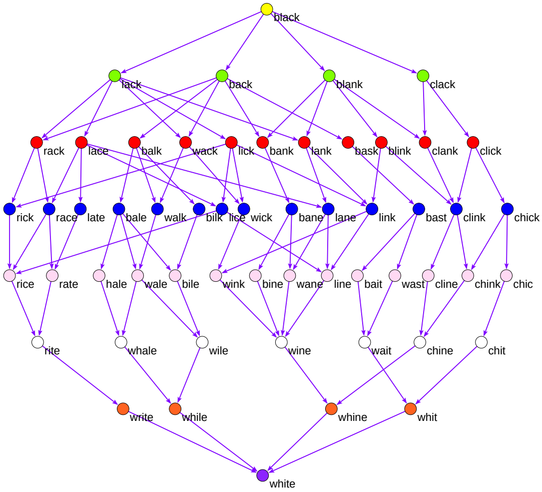



Dolžino najkrajše poti iz $u$ v $v$ označimo z $d(u, v)$.
Če ne obstaja sprehod iz $u$ v $v$ postavimo $d(u, v) = \infty$.
$d(j, a) = |(j, h, d, c, b, a)| = 5$
$d(a, j) = \infty$
$\hat{d}(u, v) = \max(d(u, v), d(v, u))$ je *razdalja*:
$\hat{d}(v, v) = 0$, $\hat{d}(u, v) = \hat{d}(v, u)$,
$\hat{d}(u, v) \leq \hat{d}(u, t) + \hat{d}(t, v)$.

*Premer* grafa je enak razdalji med, glede na $d(u, v)$, najoddaljenejšima vozliščema: $D = \max_{u,v \in \mathcal{V}} d(u, v)$.

`Network/Create New Network/Subnetwork with Paths/`

# Najkrajše poti




DICT28.

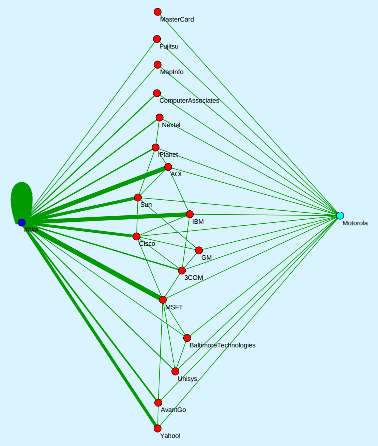
# Enakovrednosti in razbitja

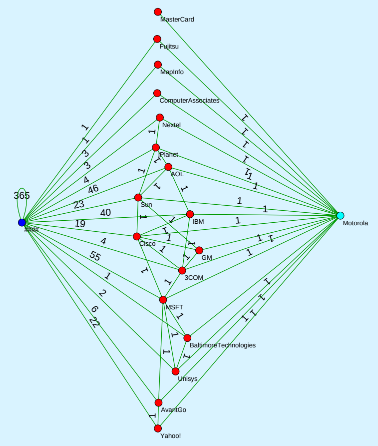
Relacija $R$ na $\mathcal{V}$ je *enakovrednost* (ekvivalenčna) ntk. je
*refleksivna* $\forall v \in \mathcal{V} : vRv$, *simetrična* $\forall u, v \in \mathcal{V} : (uRv \Rightarrow vRu)$ in
*tranzitivna* $\forall u, v, z \in \mathcal{V} : uRz \wedge zRv \Rightarrow uRv$.
Vsaka enakovrednost $R$ določa neko razbitje v *razrede* $[v] = \{u : vRu\}$.
Vsako razbitje $\mathbf{C}$ določa neko enakovrednost
$uRv \Leftrightarrow \exists C \in \mathbf{C} : u \in C \wedge v \in C$.

*k-sosedi* vozlišča $v$ je množica vozlišč, ki so za $k$ oddaljena od $v$,
$N^k(v) = \{u \in v : d(v, u) = k\}$.
Množica vseh množic $k$-sosedov, $k = 0, 1, \ldots$ of $v$ je razbitje množice $\mathcal{V}$.
*k-soseščina* vozlišča $v$, $N^{(k)}(v) = \{u \in v : d(v, u) \leq k\}$.

`Network/Create Partition/k-Neighbors/`

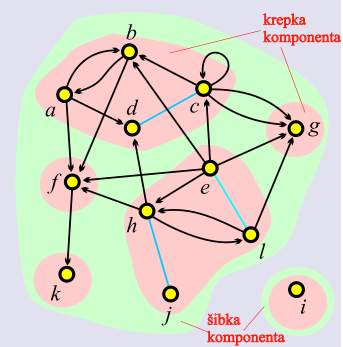
# Soseščina Motorole




Debelina povezav je koren iz vrednosti.

# Povezanosti

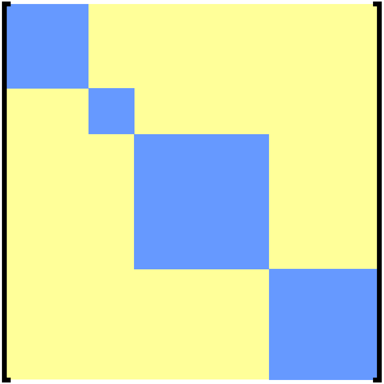



Vozlišče $u$ je *dosegljivo* iz vozlišča $v$ ntk. obstaja sprehod z začetkom $v$ in koncem $u$.
Vozlišče $v$ je *šibko povezano* z vozliščem $u$ ntk. obstaja veriga s krajiščema $v$ in $u$.
Vozlišče $v$ je *krepko povezano* z vozliščem $u$ ntk. sta vzajemno dosegljivi.
Šibka in krepka povezanost sta enakovrednosti.
graphCon.net

Razredi porajajo šibke/krepke *komponente* ali *kose* grafa.

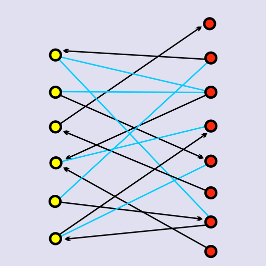
`Network/Create Partition/Components/`

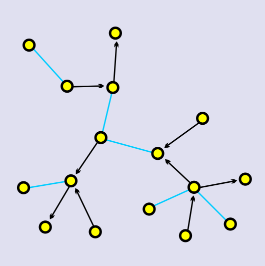
# Šibke komponente



Če preuredimo vozlišča omrežja, tako da vozlišča iz iste skupine šibkega razbitja postavimo skupaj, dobimo matrični prikaz sestavljen iz diagonalnih blokov – šibkih komponent.
Za večino problemov velja, da jih lahko ločeno rešimo za vsako šibko komponento posebej in nato dobljene rešitve združimo v rešitev za celotno omrežje.

# Posebni grafi – dvodelni, drevo

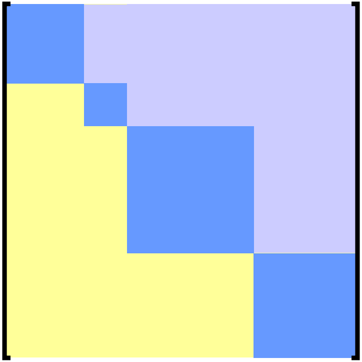


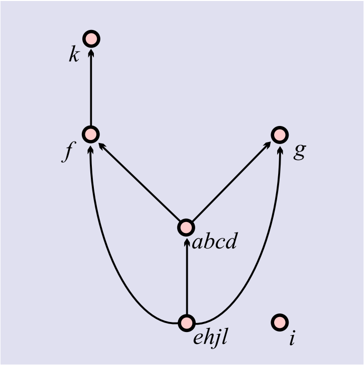


Graf $G = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ je *dvodelen* ntk. lahko množico vozlišč $\mathcal{V}$ razbijemo na podmnožici $V_1$ in $V_2$, tako da ima vsaka povezava iz $\mathcal{L}$ eno krajišče v $\mathcal{V}_1$ drugo pa v $\mathcal{V}_2$.
Šibko povezan graf $G$ je *drevo* ntk. ne vsebuje (zank in) polciklov dolžine vsaj 3.

# Krepka skrčitev grafa (kondenzacija)



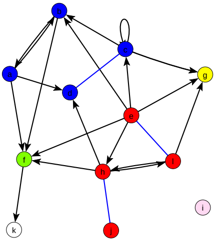


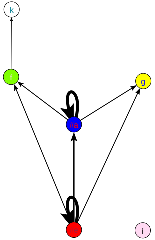


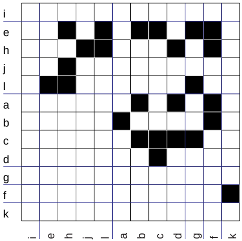

Če v danem grafu skrčimo vsako krepko komponento v ustrezno vozlišče, odstranimo zanke in združimo vzporedne povezave, je tako dobljeni *skrčeni* graf acikličen. Za vsak aciklični graf obstaja *urejenost* / *oštevilčenje* $i : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$, tako da velja $(u, v) \in \mathcal{A} \Rightarrow i(u) < i(v)$.

# Skrčitev grafa – primer

```
Network/Create Partition/Components/Strong [1]
Operations/Network+Partition/Shrink Network  [1][0]
Network/Create New Network/Transform/Remove/Loops [yes]
Network/Acyclic Network/Depth Partition/Acyclic
Partition/Make Permutation
Permutation/Inverse Permutation
select partition [Strong Components]
Operations/Partition+Permutation/Functional Composition/Partition*Permutation
Partition/Make Permutation
select [original network]
File/Network/Export Matrix to EPS/Using Permutation
```

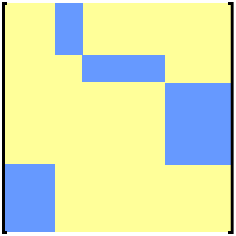


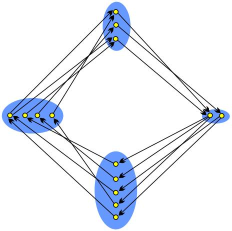



# Zgradba krepkih komponent





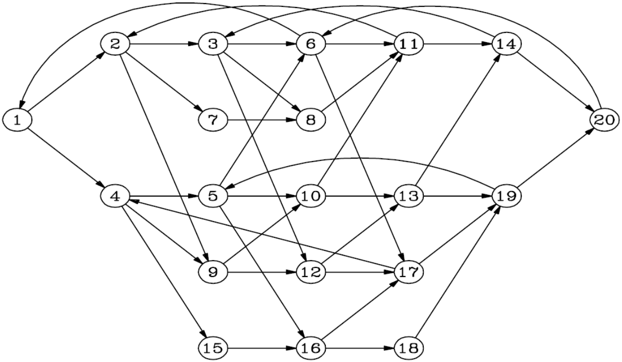


Notranja zgradba krepke komponente – naj bo $d$ največji skupni delitelj dolžin obhodov v krepki komponenti.
Komponenta je *enostavna*, če je $d = 1$; sicer je *periodična* s periodo $d$.

Množico vozlišč $\mathcal{V}$ krepko povezanega usmerjenega grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, R)$ je mogoče razbiti na $d$ skupin $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_d$, tako da za vsako povezavo $(u, v) \in R$ velja $u \in \mathcal{V}_i \Rightarrow v \in \mathcal{V}_{(i \bmod d)+1}$ .

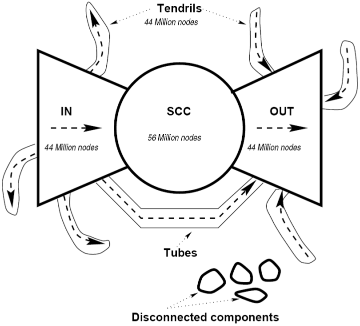
`Network/Create Partition/`
`Components/Strong-Periodic`

# ...Zgradba krepkih komponent




Bonhourejev periodični graf. Pajek – matrike

# Spletni metuljček (Bow-tie)




Kumar &: The Web as a graph

Naj bo $\mathcal{S}$ *največja krepka komponenta* v omrežju $\mathcal{N}$; $\mathcal{W}$ šibka komponenta, ki vsebuje $\mathcal{S}$; $\mathcal{I}$ množica vozlišč, iz katerih je $\mathcal{S}$ dosegljiva; $\mathcal{O}$ množica vozlišč dosegljivih iz $\mathcal{S}$; $\mathcal{T}$ (cevi) vozlišča (niso v $\mathcal{S}$) na poteh iz $\mathcal{I}$ v $\mathcal{O}$; $\mathcal{R} = \mathcal{W} \setminus (\mathcal{I} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{T})$ (lovke); in $\mathcal{D} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$. Razbitje

$$\{\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{D}\}$$

imenujemo *metuljčno* razbitje $\mathcal{V}$.

Opomba: za splošna usmerjena omrežja slika ne prikazuje vseh možnosti – v množici $\mathcal{R}$ so lahko tudi verige.

`Network/Create Partition/Bow-Tie`

# Dvopovezanost

Vozlišči $u$ in $v$ sta *dvopovezani* ntk. sta povezani (v obe smeri) s po dvema neodvisnima (brez skupnih notranjih vozlišč) potema. Dvopovezanost določa razbitje množice povezav.

Vozlišče je *stično* vozlišče ali *stičišče* ntk. njegova odstranitev poveča število šibkih komponent grafa.

Povezava je *most* ntk. njena odstranitev poveča število šibkih komponent grafa.

`Network/Create New Network/with Bi-Connected Components`

# $k$-povezanost



*Vozliščna povezanost* $\kappa$ grafa $G$ je enaka najmanjšemu številu vozlišč, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s prestalimi vozlišči nepovezan ali trivialen (enak $K_1$).

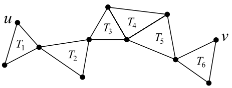
*Povezavna povezanost* $\lambda$ grafa $G$ je enaka najmanjšemu številu povezav, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s prestalimi povezavami nepovezan ali trivialen.
Velja Whitneyeva neenakost: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .

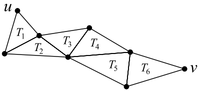
Graf $G$ je *(po vozliščih) $k-$povezan*, če je $\kappa(G) \geq k$ in je *po povezavah $k-$povezan*, če je $\lambda(G) \geq k$.

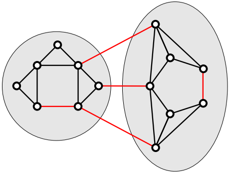
Velja Whitneyeva različica Mengerjevega izreka: Graf $G$ je po vozliščih/povezavah $k-$povezan ntk. vsak par vozlišč povezuje vsaj $k$ po vozliščih/povezavah ločenih sprehodov.

# Trikotniška povezanost – neusmerjeni grafi

V neusmerjenem grafu imenujemo *trikotnik* podgraf izomorfen $K_3$. Zaporedje trikotnikov $(T_1, T_2, \ldots, T_s)$ grafa $G$ *(vozliščno) trikotniško povezuje* vozlišči $u, v \in \mathcal{V}$ ntk. $u \in T_1$ in $v \in T_s$ ali $u \in T_s$ in $v \in T_1$ ter $\mathcal{V}(T_{i-1}) \cap \mathcal{V}(T_i) \neq \emptyset$, $i = 2, \ldots s$; in *povezavno trikotniško povezuje* vozlišči $u, v \in \mathcal{V}$ ntk zadošča še strožji različici zadnjega pogoja $\mathcal{E}(T_{i-1}) \cap \mathcal{E}(T_i) \neq \emptyset$, $i = 2, \ldots s$.

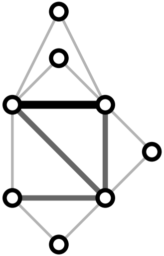


Vozliščna trikotniška povezanost je enakovrednost na vozliščih; povezavna pa na povezavah. Članek.

# Trikotniško omrežje



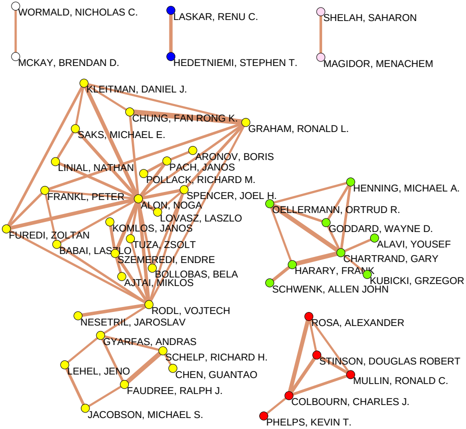
Naj bo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ enostaven neusmerjen graf. Prirejeno *trikotniško omrežje* $\mathcal{N}_T(\mathcal{G}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T, w)$ določeno z $\mathcal{G}$ je podgraf $\mathcal{G}_T = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$ grafa $\mathcal{G}$, kjer je $E_T$ množica tistih povezav iz $\mathcal{E}$, ki leže na vsaj enem trikotniku. Utež $w(e)$ povezave $e \in \mathcal{E}_T$ je enaka številu različnih trikotnikov, ki jim povezava $e$ pripada.

Trikotniška omrežja omogočajo učinkovito razkrivanje gostih delov omrežja. Če povezava $e$ pripada *$k$-kliki* (podgrafu izomorfnemu $K_k$) v $\mathcal{G}$, je $w(e) \geq k - 2$.

`Network/Create New Network/with Ring Counts/3-Rings/Undirected`

# Povezavni prerez na ravni 16 trikotniškega omrežja Erdős-ovega grafa sodelovanj

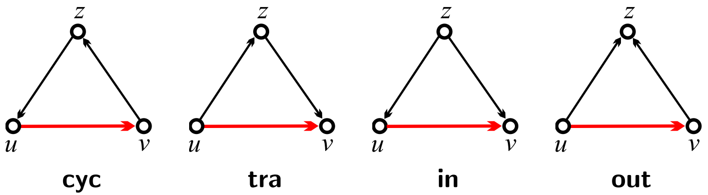





brez Erdősa,
$n = 6926$,
$m = 11343$

# Trikotniška povezanost – usmerjeni grafi

Če je graf $\mathcal{G}$ mešan, zamenjamo neusmerjene povezave s pari nasprotno usmerjenih. Naj bo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ enostaven usmerjen graf brez zank. Za izbrano usmerjeno povezavo $(u, v) \in \mathcal{A}$ obstajajo štiri vrste *usmerjenih trikotnikov*: **cyc**lic, **tra**nsitive, **in**put in **out**put.



# . . . Trikotniška povezanost – usmerjeni grafi

Če pozabimo na vlogo izbrane povezave, imamo le dve vrsti trikotnikov, ki jim povezava lahko pripada: ciklične (**cyc**) in tranzitivne (**tra**, **in**, **out**). V programu `Pajek` ukaz

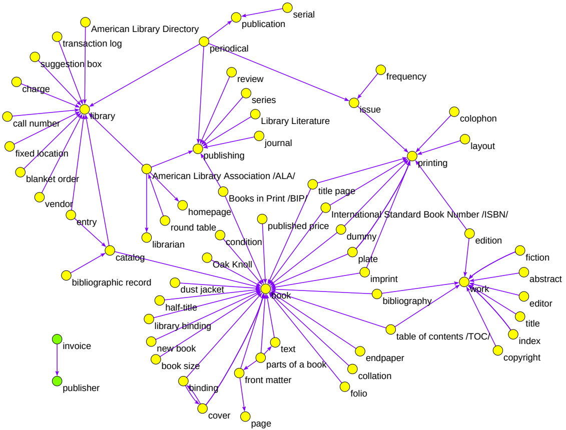
`Network/Create New Network/with Ring Counts/3-Rings/Directed`

omogoča določiti ustrezna omrežja ($\mathcal{N}_{cyc}$ – ciklične uteži, $\mathcal{N}_{tra}$ – tranzitivnostne uteži, $\mathcal{N}_{sc}$ – tranzitivne bližnjice).

Pojem trikotniške povezanosti lahko posplošimo na *povezanost s kratkimi (pol)cikli – obroči* in ustrezna omrežja; lahko pa tudi na povezanost z majhnimi podgrafi (npr. "klikami", glejte Palla).

# Povezavni prerez na ravni 11 tranzitivnega trikotniškega omrežja slovarja ODLIS





# Pomembna vozlišča v omrežju

Pri izgradnji *mer pomembnosti* moramo najprej upoštevati ali je omrežje usmerjeno ali neusmerjeno. Meram pomembnosti na neusmerjenih omrežjih pravimo mere *središčnosti*; na usmerjenih omrežjih pa mere *veljave*. Slednje se naprej delijo na mere *ugleda* ali *podpore* (upoštevamo vstopajoče povezave) in mere *vpliva* (upoštavamo izstopajoče povezave).

Če zamenjamo dano usmerjeno omrežje z njemu nasprotnim (obrnemo smeri povezav) preidejo mere ugleda v mere vpliva, in obratno.

Dejanski pomen mere pomembnosti je odvisen od relacije (omrežja). Tako npr. je 'najuglednejša' oseba glede na relacijo '__ ne mara sodelovati z __' dejansko najmanj priljubljena oseba.

Odstranitev pomembnega vozlišča iz omrežja povzroči občutno spremembo v zgradbi/delovanju omrežja.

# Normalizacija

Naj bo $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ neka mera pomembnosti vozlišč omrežja $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$. Če želimo vrednosti mere $p$ primerjati med različnimi omrežji, moramo poskrbeti za primerljivost. Pogosto jo poskušamo zagotoviti tako, da mero $p$ *normaliziramo*.

Naj bo $\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})$, kjer je $\mathbf{N}(\mathcal{V})$ izbrana množica omrežij nad isto množico $\mathcal{V}$,

$$p_{max} = \max_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} \max_{v \in \mathcal{V}} p_{\mathcal{N}}(v) \qquad \text{in} \qquad p_{min} = \min_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} \min_{v \in \mathcal{V}} p_{\mathcal{N}}(v)$$

Tedaj je normalizirana mera enaka

$$p'(v) = \frac{p(v) - p_{min}}{p_{max} - p_{min}} \in [0, 1]$$

# Stopnje

Najpreprostejšo mero pomembnosti predstavljajo stopnje vozlišč. Ker sta za enostavna omrežja $\deg_{min} = 0$ in $\deg_{max} = n - 1$, je ustrezna normalizirana mera

*središčnost* $$\deg'(v) = \frac{\deg(v)}{n-1}$$

in podobno

*ugled* $$\mathrm{indeg}'(v) = \frac{\mathrm{indeg}(v)}{n}$$

*vpliv* $$\mathrm{outdeg}'(v) = \frac{\mathrm{outdeg}(v)}{n}$$

Namesto stopenj glede na osnovno omrežje lahko vzamemo tudi stopnje glede na relacijo dosegljivosti (tranzitivna ovojnica).

```
Network/Create Partition/Degree
Network/Create Vector/Centrality/Degree
Network/Create Vector/Centrality/Proximity Prestige
```

# Dostopnost



Če upoštevamo razdalje $d(u, v)$ med vozlišči v omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ lahko vpeljemo

*polmer* $\quad r(v) = \max_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)$

Količino $D = \max_{u,v \in \mathcal{V}} d(v, u)$ imenujemo *premer* omrežja.

*skupna dostopnost* $\quad S(v) = \sum_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)$

Za usmerjeno omrežje sta vpeljani meri meri vpliva. Meri ugleda dobimo, če v obrazcih $d(u, v)$ zamenjamo z $d(v, u)$.

Če omrežje ni krepko povezano, sta $r_{max}$ in $S_{max}$ enaki $\infty$. Sabidussi (1966) je zato kot mero dostopnosti vpeljal $1/S(v)$ oziroma v normalizirani obliki

*dostopnost* $\quad cl(v) = \dfrac{n-1}{\sum_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)}$

`Network/Create Vector/Centrality/Closeness`

`Network/Create New Network/Subnetwork with Paths/Info on Diameter`

# Vmesnost



Pomembna so tudi vozlišča, ki lahko nadzirajo pretok podatkov po omrežju. Če privzamemo, da so za prenos pomembne le najkrajše poti, dobimo kot mero *vmesnosti* (Anthonisse 1971, Freeman 1977)

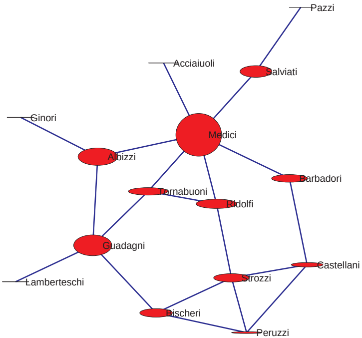
$$b(v) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{u,t \in \mathcal{V}: g_{u,t} > 0 \\ u \neq v, t \neq v, u \neq t}} \frac{g_{u,t}(v)}{g_{u,t}}$$

kjer je $g_{u,t}$ število najkrajših poti iz $u$ v $t$; in $g_{u,t}(v)$ število takih med njimi, ki gredo skozi vozlišče $v$.

Hiter postopek za izračun vmesnosti je razvil Brandes.

`Network/Create Vector/Centrality/Betweenness`

# Padgett-ove floretinske rodbine




| | | close | between |
|---|---|---|---|
| 1. | Acciaiuoli | 0.368421 | 0.000000 |
| 2. | Albizzi | 0.482759 | 0.212454 |
| 3. | Barbadori | 0.437500 | 0.093407 |
| 4. | Bischeri | 0.400000 | 0.104396 |
| 5. | Castellani | 0.388889 | 0.054945 |
| 6. | Ginori | 0.333333 | 0.000000 |
| 7. | Guadagni | 0.466667 | 0.254579 |
| 8. | Lamberteschi | 0.325581 | 0.000000 |
| 9. | Medici | 0.560000 | 0.521978 |
| 10. | Pazzi | 0.285714 | 0.000000 |
| 11. | Peruzzi | 0.368421 | 0.021978 |
| 12. | Ridolfi | 0.500000 | 0.113553 |
| 13. | Salviati | 0.388889 | 0.142857 |
| 14. | Strozzi | 0.437500 | 0.102564 |
| 15. | Tornabuoni | 0.482759 | 0.091575 |

# Kazala in viri



Vozliščem povezanega usmerjenega omrežja $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ priredimo dve vrednosti: kakovost vira (vsebine) $x_v$ in kakovost kazala $y_v$ (Kleinberg, 1998). Na dober vir kažejo dobra kazala in dobro kazalo kaže na dobre vire

$$x_v = \sum_{u:(u,v)\in\mathcal{L}} y_u \qquad \text{in} \qquad y_v = \sum_{u:(v,u)\in\mathcal{L}} x_u$$

Naj bo $\mathbf{W}$ matrika omrežja $\mathcal{N}$ in $\mathbf{x}$ ter $\mathbf{y}$ vektorja obeh lastnosti. Tedaj lahko zvezi zapišemo $\mathbf{x} = \mathbf{W}^T\mathbf{y}$ oziroma $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$.

Začnimo z $\mathbf{y} = [1, 1, \ldots, 1]$ in nato zaporedoma izračunamo po obeh zvezah nove približke za $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$. Oba vektorja po vsakem koraku normaliziramo. To ponavljamo dokler se vektorja ne ustalita. Pokazati je mogoče, da opisani postopek konvergira. Limitni vektor $\mathbf{x}^*$ je glavni lastni vektor matrike $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$; $\mathbf{y}^*$ pa matrike $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$.

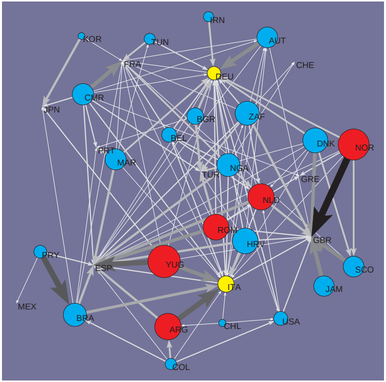
# . . . Kazala in viri

Podobni postopki se uporabljajo v spletnih iskalnikih za ocenjevanje pomembnosti posameznih strani.
PageRank, PageRank / Google, HITS / AltaVista, SALSA, teorija.

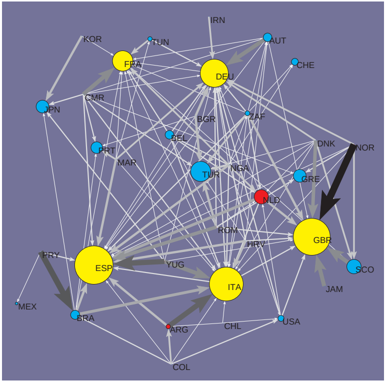
`Network/Create Vector/Centrality/Hubs-Authorities`

Na naslednji prosojnici: Na svetovnem nogometnem prvenstvu v Parizu leta 1998 je sodelovalo 22 nogometnih reprezentanc. V omrežju so vse države, iz katerih so nogometaši igrali v ligah teh 22 držav, in vse države, v katerih ligah so igrali nogometaši iz teh 22 držav. Relacija je *igralec iz države x igra v državi y*; utež je število takih igralcev. Podatke je zbral Lothar Krempel.
`football.net`

# . . . Kazala in viri: nogometaši




Izvozniki (kazala/hubs)




Uvozniki (viri/authorities)

# Nakopičenost

*Nakopičenost* v vozlišču $v$ je določena kot razmerje med številom vseh povezav v podgrafu $G^1(v)$ porojenim s soseščino danega vozlišča in številom povezav v polnem grafu na teh vozliščih

$$C(v) = \frac{2|\mathcal{L}(G^1(v))|}{\deg(v)(\deg(v)-1)}$$

za $\deg(v) > 1$; in $C(v) = 0$ sicer.

Vpliv velikosti soseščine lahko zagotovimo z naslednjim popravkom

$$C_1(v) = \frac{\deg(v)}{\Delta} C(v)$$

kjer je $\Delta$ največja stopnja v grafu $G$. Ta doseže največjo možno vrednost le na vozliščih, ki pripadajo osamljeni kliki reda $\Delta$.

`Network/Create Vector/Clustering Coefficients/CC2`

članek

# Usredinjenost omrežja



Mero pomembnosti $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ lahko povzamemo na celotnem omrežju kot njegovo usredinjenost $C(p)$:

$$p^* = \max_{v \in \mathcal{V}} p(v)$$

$$D(p) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (p^* - p(v))$$

$$D^* = \max_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} D(p_{\mathcal{N}})$$

Tedaj je *usredinjenost* glede na $p$

$$C(p) = \frac{D(p)}{D^*}$$

Za večino mer je najbolj usredinjena zvezda $S_n$ in najmanj polni graf $K_n$.