



# Analiza omrežij

## 6. Zgradba omrežij otoki in gruče

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani, FMF, matematika

Interdisciplinarni doktorski študijski program Statistika  
Ljubljana, april 2014



# Kazalo

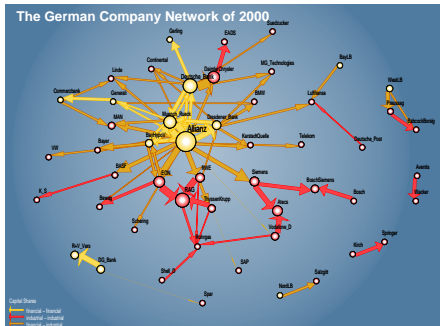
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

- 1 Otoki
- 2 Gruče



L. Krempf, MPI.

wiki: <http://pajek.imfm.si/doku.php?id=event:pd>  
April 14, 2014/ april 2013



# Otoki

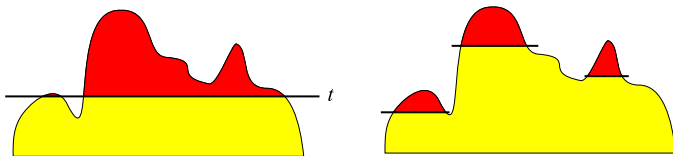
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Če dano lastnost/utež vozlišč/povezav predstavimo kot njihovo višino, nam naše omrežje določa nekakšno pokrajino s hribi in dolinami. Če to pokrajino potopimo v vodo do izbrane višine, dobimo *otoke*. S spreminjanjem višine vode dobivamo različne otoke. V uprabah nas običajno zanimajo ne preveliki in ne premajhni otoki – le otoki velikosti med izbranimi  $k$  in  $K$ . Postopek 'otoki' začne s pokrajino popolnoma potopljeno v vodo. Nato znižujemo višino, dokler se ne pojavi otok prave velikosti ...



Otoki so zelo splošen in učinkovit postopek za določanje 'pomembnih' podomrežij v danem omrežju.



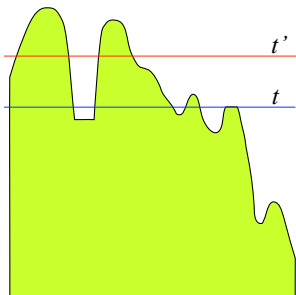
## ... otoki

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V omrežju  $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, p)$ ,  $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  imenujemo **pravi vozliščni otok** skupino vozlišč  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ , ki poraja povezan podgraf in so vozlišča v skupini 'višje' od sosednjih vozlišč

$$\max_{u \in N(\mathcal{C})} p(u) < \min_{v \in \mathcal{C}} p(v)$$

V omrežju  $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, w)$ ,  $w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  imenujemo **pravi povezavni otok** skupino vozlišč  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ , ki poraja povezan podgraf in so vozlišča v skupini 'močnejše' povezana, kot s sosedi – v podgrafu porojenem s  $\mathcal{C}$  obstaja vpeto drevo  $\mathcal{T}$ , tako da je

$$\max_{(u,v) \in \mathcal{L}, u \notin \mathcal{C}, v \in \mathcal{C}} w(u,v) < \min_{(u,v) \in \mathcal{T}} w(u,v)$$

Vpeljemo lahko tudi pojem **enostavnih** otokov z enim samim 'vrhom'.





# Lastnosti vozliščnih otokov

- Množica vozlišč posamezne komponente vozliščnega prereza na izbrani ravni  $t$  določa pravi vozliščni otok.
- Množica  $\mathcal{H}_p(\mathcal{N})$  vseh vozliščnih otokov omrežja  $\mathcal{N}$  je polna razslojitev:
  - otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem;
  - vsako vozlišče pripada vsaj enemu otoku.
- Vozliščni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije lastnosti  $p$ .
- Krajišči iste povezave ne moreta pripadati dvem različnim otokoma.



# Postopek za določanje vozliščnih otokov

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže novo vozlišče  $v$  iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezano.
- Vozlišče  $v$  in z njim povezane otoke združimo v nov, večji otok. Otoki, ki so pri tem združeni, so njegovi podotoki. Vozlišče  $v$  je pristanišče novega otoka (vozlišče z najmanjšo vrednostjo).
- To je mogoče izvesti v času  $\mathcal{O}(\max(n \log n, m))$ .

Operations/Network+Vector/Islands/Vertex Property



# Enostavni vozliščni otoki

- Množica vozlišč  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$  je (lokalni) *vozliščni vrh*, če je pravi vozliščni otok in imajo vsa njegova vozlišča isto vrednost.
- Vozliščni otok je *enostaven*, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste vozliščnih otokov:
  - PLOSKI – vsa njegova vozlišča imajo isto vrednost;
  - ENOVRŠNI – otok ima en sam vrh;
  - VEČVRŠNI – otok ima več vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.



# Lastnosti povezavnih otokov

- Množice vozlišč povezanih komponent povezavnega prereza na izbrani ravni  $t$  so pravi povezavni otoki.
- Množica  $\mathcal{H}_w(\mathcal{N})$  vseh pravih povezavnih otokov omrežja  $\mathcal{N}$  je razslojitev (ne nujno polna):
  - dva otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem.
- Povezavni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije uteži  $w$ .
- Krajišči povezave lahko pripadata dvema ločenima pravima povezavnima otokoma.





# Algoritem določitve pravih povezavnih otokov

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže nova povezava  $e$  iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezana (obstajata največ dva).
- Združimo ta otoka s povezavo ali dodamo povezavo otoku. Dobimo večji otok. Združeni otoki so podotoki tega otoka. Povezava  $e$  je *pristanišče* novega otoka (najmanjša vrednost v minimalnem vpetem drevesu).
- Prave povezavne otoke je mogoče določiti v času  $\mathcal{O}(m \log n)$ .

Network/Create Partition/Islands/Line Weights



# Enostavni povezavni otoki

- Množica vozlišč  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$  določa *povezavni vrh*, če je pravi povezavni otok, ki vsebuje minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku.
- Povezavni otok je *enostaven*, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste povezavnih otokov:
  - PLOSKI – minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku;
  - ENOVRŠNI – otok ima en sam povezavni vrh;
  - VEČVRŠNI – otok ima več povezavnih vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.



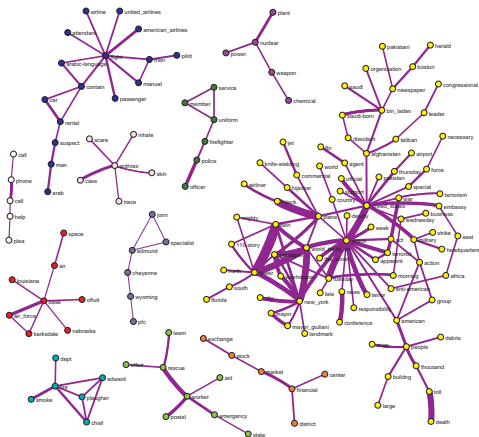
# Otoki - Reuters terror news

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



S postopkom **CRA** sta S. Corman in K. Dooley ustvarila omrežje **Reuters terror news**, ki povzema vse novice, ki jih je izdalo novičarsko podjetje Reuters v 66 zaporednih dnevih po 11. septembru in so se nanašali na ta dogodek. Vozlišča omrežja so besede (izrazi); besedi sta povezani, če se sopojavljata v v enoti besedila. Utež povezave je pogostost sopojavljanja. Omrežje ima  $n = 13332$  vozlišč in  $m = 243447$  povezav.



# Primer: Ameriški patenti

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Omrežje ameriških patentov (**Nber, US Patents**) ima 3774768 vozlišč in 16522438 usmerjenih povezav (1 zanka). Če zanko odstranimo, je omrežje aciklično. Za uteži povezav smo vzeli delež različnih poti od začetkov do koncev, ki vodijo skozi povezavo in določili vse (2,90)-otoke. Z otoki porojeno omrežje ima 470137 vozlišč, 307472 povezav in za različne  $k$ :  $C_2 = 187610$ ,  $C_5 = 8859$ ,  $C_{30} = 101$ ,  $C_{50} = 30$  otokov. **Rolex**

[1]	0	139793	29670	9288	3966	1827	997	578	362	250
[11]	190	125	104	71	47	37	36	33	21	23
[21]	17	16	8	7	13	10	10	5	5	5
[31]	12	3	7	3	3	3	2	6	6	2
[41]	1	3	4	1	5	2	1	1	1	1
[51]	2	3	3	2	0	0	0	0	0	1
[61]	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0
[71]	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
[81]	2	0	0	0	0	1	2	0	0	7



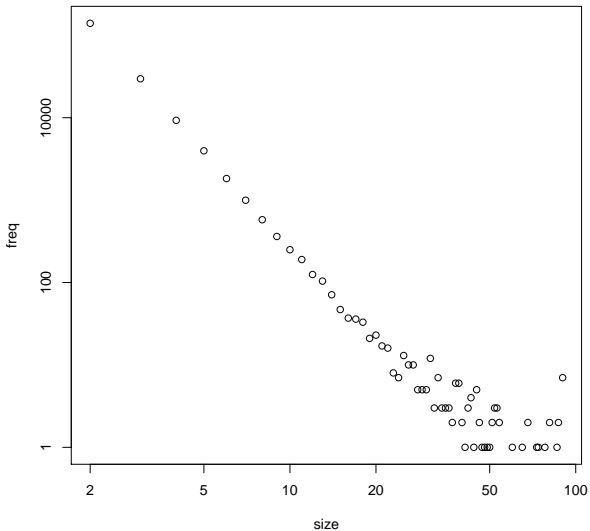
# Porazdelitev velikosti otokov

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij



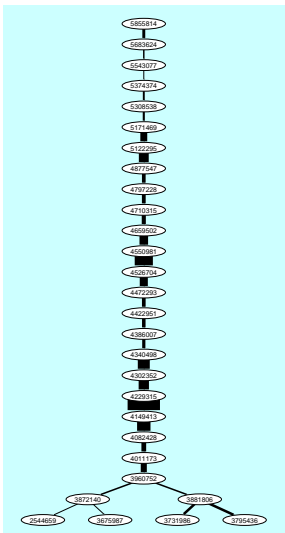
# Glavna pot in glavni otok v US Patents

Analiza omrežij

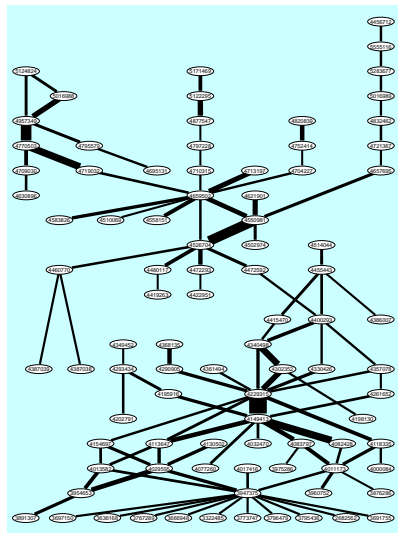
V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj



Analiza omrežij





# Glavni otok - Liquid crystal display

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Table 1: Patents on the liquid-crystal display

patent	day	author(s) and title
2516098	Mar 13, 1994	Hayes: Infrared liquid-polymerizing element and the formation and use thereof
3262542	Jan 29, 1994	Winder, et al.: Reformation of aromatic carbonates
5322485	May 30, 1994	Williams: Electro-optical elements utilizing an organic anisotropic compound
3636368	Jan 18, 1992	Josephson: Preparation of polymeric aromatic compounds
3646948	May 30, 1994	McKervey, et al.: Liquid crystal toner imaging system having an undercooled image on a distributed background
3675987	Jul 11, 1992	Ballar: Liquid crystal compositions and devices
3691725	Sep 19, 1992	Cesari: Check with digital display
3697130	Oct 19, 1992	Vysocik: Electro-optic systems in which an electrochromic or dipolar material is dispersed throughout a liquid crystal to reduce the turn-off time
3732966	May 8, 1993	Ferriere: Display device utilizing liquid crystal light modulation
3737890	Oct 23, 1993	Avrami, et al.: Class of stable trans-alkene compounds, some displaying nematic anisotropy and/or near room temperature and others in a range up to 100°C
3737947	Nov 20, 1993	Schneitramer: Substituted azine benzene compounds
3759436	Mar 11, 1994	Deller, et al.: Nematicogenic material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperatures
3769476	Mar 12, 1994	Beltrich, et al.: Electro-optical liquid-modulation cell utilizing a nematicogenic material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperatures
3872140	Mar 18, 1993	Khandanov, et al.: Liquid crystalline compositions and methods
3872896	Aug 8, 1993	Yoshida, et al.: Use of smectic liquid crystalline substances
3881806	May 6, 1993	Suzuki: Electro-optical display device
3893367	Jan 24, 1993	Tokumitsu, et al.: Phase material of the voltage applied to opposite electrodes for a cholesteric to smectic phase transition display
3947375	Mar 30, 1996	Gray, et al.: Liquid crystal materials and devices
3954653	May 4, 1996	Yamanaka: Liquid crystal composition having high dielectric anisotropy and display device incorporating same
3980872	Jan 1, 1996	Khandanov, et al.: Liquid crystal compositions
3972926	Aug 17, 1995	Ch: Low voltage activated field effect liquid crystals (composition and method of synthesis)
4008864	Dec 28, 1996	Black, et al.: Liquid crystal mixtures for electro-optical display devices
4011173	Mar 8, 1997	Schneitramer: Modified nematic mixtures with positive dielectric anisotropy
4032862	Mar 22, 1997	Carvillat: Liquid crystal compositions and electro-optic devices incorporating them
4071446	Dec 12, 1997	Black, et al.: Tricyanophenyl 4-alkyl-4'-alkylphenylcarboxylate method for preparing same and liquid crystal compositions using same
4092595	Jan 14, 1997	Hess, et al.: Novel liquid crystal compositions and electro-optic devices incorporating them
4100720	Mar 7, 1997	Gray, et al.: Optically active cyano-biphenyl compounds and liquid crystal materials containing them
4082428	Apr 4, 1998	Hsu: Liquid crystal composition and method

Table 2: Patents on the liquid-crystal display

patent	day	author(s) and title
4028799	Apr 11, 1998	UK: Nematic liquid crystal compositions
4113647	Sep 12, 1978	Coutts, et al.: Liquid crystalline materials
4113732	Oct 8, 1978	Krause, et al.: Liquid crystalline materials of reduced viscosity
4120592	Dec 10, 1978	Eidemshank, et al.: Liquid crystalline cyclodextrane derivatives
4149413	Apr 11, 1979	Gray, et al.: Optically active liquid crystal mixtures and liquid crystal devices containing them
4154087	May 15, 1979	Eidemshank, et al.: Liquid crystalline benzobiphenyl derivatives
4193916	Apr 1, 1990	Coutts, et al.: Liquid crystal compounds
4196130	Apr 15, 1990	Bolter, et al.: Liquid crystal mixtures
4200779	May 13, 1990	Sato, et al.: Nematic liquid crystalline materials
4222511	Oct 23, 1990	Krause, et al.: Liquid crystalline cyclodextrane derivatives
4263052	Apr 14, 1991	Gray, et al.: Liquid crystal compounds and materials and devices containing them
4296905	Sep 22, 1991	Kashe, Ester compound
4293454	Oct 8, 1991	Dewarick, et al.: Liquid crystal compounds
4302352	Nov 24, 1991	Eidemshank, et al.: Fluorophenylcyclodextranes, the preparation thereof and their use as components of liquid crystal dielectrics
4330426	May 18, 1992	Eidemshank, et al.: Cyano-biphenyls, their preparation and use in dielectric and electro-optical display elements
4340498	Jul 20, 1992	Equigant: Halogenated azine derivatives
4349452	Apr 14, 1992	Omasu, et al.: Cyano-biphenyl compounds
4357576	Nov 2, 1992	Chen, et al.: Liquid crystal compositions containing an alkylic ring and exhibiting a low dielectric anisotropy and liquid crystal materials and devices incorporating such compounds
4363194	Nov 30, 1992	Omasu, et al.: Anisotropic cyano-biphenyl/biphenyl esters
4368132	Jan 13, 1993	Omasu, et al.: Anisotropic cyano-biphenyl/biphenyl esters
4387038	Jun 7, 1993	DC-anisotropy and low optical anisotropy
4386087	May 21, 1993	Krause, et al.: Liquid crystalline naphthalene derivatives
4387038	Jun 7, 1993	Pikiel, et al.: 4-(trans-4'-alkylalkoxy) benzoic acid 4'-cyano-4'-biphenyl esters
4387039	Jun 7, 1993	Sagamoto, et al.: Trans-4'-alkylalkoxy(benzyloxy)-cyclodextrane carboxylic acid 4'-cyano(biphenyl) ester
4400293	Aug 23, 1993	Bonnet, et al.: Liquid crystalline cyano-biphenyl derivatives
4415470	Nov 15, 1993	Eidemshank, et al.: Liquid crystalline fluoro-containing biphenyl derivatives
4415470	Nov 15, 1993	Prud'homme, et al.: Liquid crystalline electro-optical display elements based thereon
4419383	Dec 8, 1993	Prud'homme, et al.: Liquid crystalline cyano-biphenyl/biphenyl derivatives
4422951	Dec 27, 1993	Fakton, et al.: Liquid crystal benzene derivatives
4454443	Jun 19, 1994	Fakton, et al.: Nematic liquid crystals
4456712	Jun 29, 1994	Christie, et al.: Biphenylbenzene nematic compositions
4460779	Jul 17, 1994	Petrillio, et al.: Liquid crystal mixtures
4472203	Sep 18, 1994	Fakton, et al.: High temperature liquid crystal substances of low range and liquid crystalline compositions containing the same
4472202	Sep 18, 1994	Takatori, et al.: Nematic liquid crystalline compounds
4486117	Oct 30, 1994	Takatori, et al.: Nematic liquid crystalline compounds
4502704	Mar 5, 1995	Sagamoto, et al.: High temperature liquid-crystalline ester compounds
4510089	Apr 9, 1995	Eidemshank, et al.: Cyclodextrane derivatives

Table 3: Patents on the liquid-crystal display

patent	day	author(s) and title
4518944	Apr 30, 1995	Cravigna, et al.: P-1,6-bis(4'-alkylalkoxy)-4-(trans-4'-cyano-4'-oxyphenyl)phenyl cyano-biphenyl and liquid crystal mixtures
4526704	Jul 2, 1995	Petrillio, et al.: Multiring liquid crystal esters
4550981	Nov 5, 1995	Petrillio, et al.: Liquid crystalline esters and mixtures
4558151	Dec 10, 1995	Takatori, et al.: Nematic liquid crystalline compounds
4562826	Apr 22, 1996	Petrillio, et al.: Fluorobenzene
4621901	Nov 11, 1996	Petrillio, et al.: Novel liquid crystal mixtures
4628086	Dec 23, 1996	Petrillio, et al.: Benzocyclobutene
4637090	Apr 14, 1997	Saito, et al.: Substituted pyridanes
4639592	Apr 21, 1997	Furuta, et al.: Ethane derivatives
4695131	Sep 22, 1997	Balukvili, et al.: Disubstituted tetraalkanes and their use in liquid crystal materials and devices
4704227	Nov 3, 1997	Krause, et al.: Liquid crystal compounds
4706620	Nov 24, 1997	Furuta, et al.: Novel liquid crystal mixtures
4710315	Dec 1, 1997	Schulz, et al.: Anisotropic compounds and liquid crystal mixtures
4713197	Dec 15, 1997	Eidemshank, et al.: Nitrogen-containing bicyclic compounds
4718022	Jan 12, 1998	Wiedler, et al.: Cyclodextrane derivatives
4721267	Jan 20, 1998	Yoshinaga, et al.: Liquid crystal devices
4724141	Jan 21, 1998	Eidemshank, et al.: Nitrogen-containing bicyclic compounds
4726053	Sep 12, 1998	Balukvili, et al.: Liquid crystalline compounds
4769579	Jan 3, 1999	Vankar, et al.: 2,2'-dithio-4'-alkoxy-4'-hydroxybiphenyls and their derivatives, their production processes and their use in liquid crystal display devices
4770226	Jan 10, 1999	Gray, et al.: Cyclodextrane derivative and liquid crystal compositions containing same
4782239	Apr 11, 1999	Krause, et al.: Nitrogen-containing bicyclic esters
4834262	May 23, 1999	Chen, et al.: Liquid crystal devices
4877749	Nov 17, 1999	Wolke, et al.: Liquid crystal display element
4957349	Sep 18, 1999	Clerk, et al.: Active matrix arrays for the color display of television pictures, control systems and process for producing and same
5004996	May 21, 1991	Imura: Liquid crystal display device with a birefringent compound
5018990	May 21, 1991	Okada: Liquid crystal element with improved contrast and brightness
5122990	Jan 16, 1992	Wolke, et al.: Matrix liquid crystal display
5154854	Jan 23, 1992	Konishi: Liquid crystal display device comprising a retardation compensation layer having a maximum principal refractive index in the thickness direction
5174409	Dec 15, 1992	Hirataki, et al.: Liquid-crystal matrix display
5208357	Feb 1, 1994	Wolke, et al.: Liquid-crystal display with ground regions between terminal groups
5208358	Feb 3, 1994	Wolke, et al.: Superwide liquid-crystal display
5254221	Mar 3, 1994	Wolke, et al.: Superwide liquid-crystal display
5350757	Aug 6, 1996	Bogge, et al.: Nematic liquid-crystal composition
5552146	Sep 10, 1996	Sakaguchi, et al.: Liquid crystal display having adjacent electrode terminals set equal in length
5606264	Nov 4, 1997	Mizutani, et al.: Liquid crystal display
5605834	Jan 5, 1999	Mizutani, et al.: Liquid crystal compositions and liquid crystal display elements



V. Batagelj

Analiza omrežij



# Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

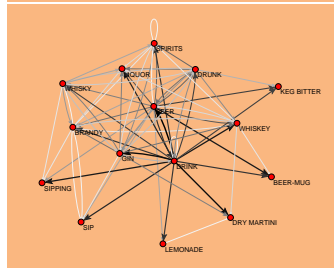
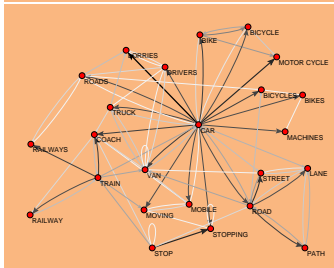
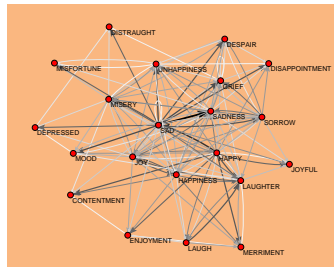
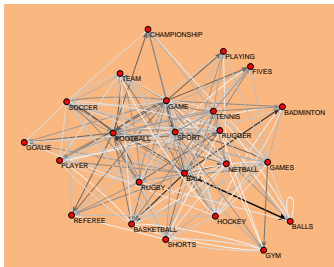
$n = 23219$ ,  $m = 325624$ , tranzitivnostna utež

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij





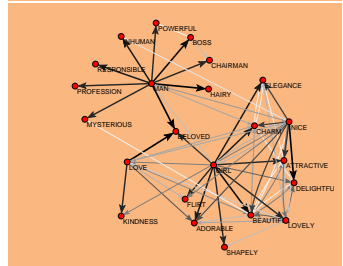
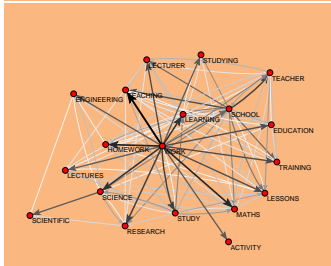
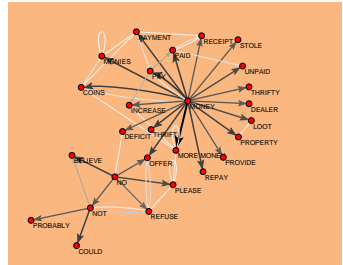
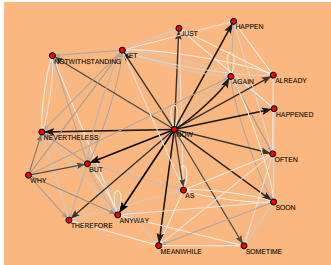
# ... Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij



Predlaganih je bilo veliko pojmov, ki opisujejo zgoščene skupini ali gruče v omrežjih.

**Klika** reda  $k$  v grafu je maksimalni polni (izomorfen  $K_k$ ) podgraf,  $k \geq 3$ .

**s-klika** je maksimalni podgraf  $\mathcal{H}$ , v katerem najkrajša pot med poljubnima njenima vozliščema ne presega  $s$ .

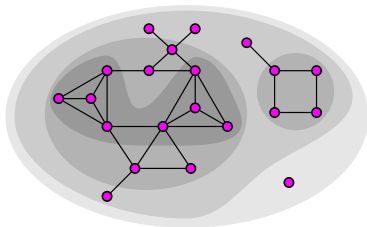
$$\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d(u, v) \leq s.$$

**s-klan** je  $s$ -klika s premerom  $s$ .  $\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d_{\mathcal{H}}(u, v) \leq s$ .  
 $s$ -pleksi, množice LS, množice lambda, sredice, ...

Za vse, razen za sredice, se je pokazalo, da jih je težko določiti.



# Sredice in posplošene sredice



Pojem sredice je vpeljal Seidman leta 1983. Podgraf  $\mathcal{H} = (\mathcal{W}, \mathcal{L}(\mathcal{W}))$  grafa  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$  porojen z množico  $\mathcal{W}$  je *k-sredica* ali *sredica reda k* ntk.  $\forall v \in \mathcal{W} : \deg_{\mathcal{H}}(v) \geq k$  in je  $\mathcal{H}$  maksimalni podgraf s to lastnostjo.

Sredici največjega reda v grafu pravimo tudi *glavna* sredica.

*Sredičnost* vozlišča  $v$  je enaka največjemu redu sredice, ki še vsebuje to vozlišče.

Stopnja  $\deg(v)$  v definiciji sredice je lahko: vhodna, izhodna, celotna, itd., kar da različne vrste sredic.



# Lastnosti sredic

S slike na prejšnji prosojnici, ki prikazuje sredice redov 0, 1, 2 in 3, vidimo:

- Sredice so gnezdene – določajo razslojitev:  
$$i < j \implies \mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}_i$$
- Sredice danega reda niso vselej povezani podgrafi.

Učinkovit postopek za določitev sredic temelji na lastnosti:

*Če iz danega grafa  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$  zaporedoma odstranjujemo vsa vozlišča (in pripadajoče povezave), ki imajo stopnjo manjšo od  $k$ , bo podgraf, ki bo ostal, sredica reda  $k$ .*



# Postopek določanja sredic

**Input:** Graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$  predstavljen s seznanji sosedov

**Output:** Tabela  $core[\mathcal{V}]$  sredičnosti vozlišč

Določi stopnje vozlišč  $degree$

Uredi množico vozlišč  $\mathcal{V}$  v naraščajočem vrstnem redu njihovih stopenj

**for**  $v \in \mathcal{V}$  glede na tekočo urejenost **do**

$core[v] = degree[v]$

**for**  $u \in N(v)$  **do**

**if**  $degree[u] > degree[v]$  **then**

$degree[u] = degree[u] - 1$

$\mathcal{V} = \mathcal{V} \setminus \{v\}$ ; Preuredi  $\mathcal{V}$



## ... postopek določanja sredic

Pri razdelavi postopka je potrebno poskrbeti za hitro urejanje tabele *degree* in njeno preurejanje. Ker so vrednosti stopenj med 0 in  $n - 1$  lahko s postopkom 'kupčkanja' to naredimo v času  $O(n)$ ; urejenost lahko popravljamo v konstantnem času. Celoten postopek lahko izvedemo v času  $O(m)$ .

Sredice so eden od redkih učinkovitih pristopov za določanje gostih delov grafa. Uporabimo jih lahko tudi za pohitritve drugih, zahtevnejših postopkov saj so na primer  $k$ -komponente in klike reda  $k$  vsebovane v sredici reda  $k$ . Velja tudi naslednja ocena za barvnost grafa  $\mathcal{G}$

$$\chi(\mathcal{G}) \leq 1 + \text{core}(\mathcal{G})$$



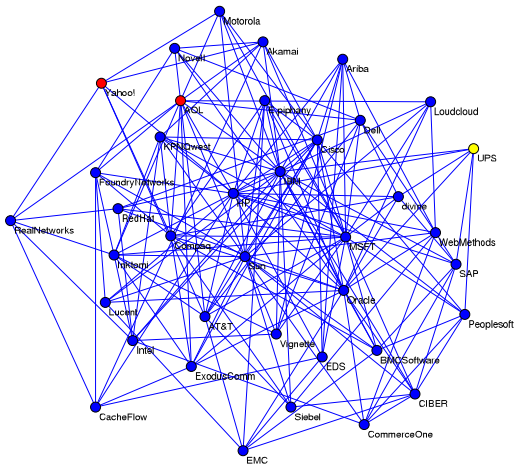
# Sredica reda 6 za Krebsova Internetna podjetja

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





# Posplošene sredice

Pojem sredice lahko posplošimo na omrežja. Naj bo  $\mathcal{N}$  omrežje nad grafom  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ . Privzemimo, da imamo na  $\mathcal{N}$  določeno funkcijo  $p(v, \mathcal{U})$ ,  $v \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  z realnimi vrednostmi – *p-funkcija*.

Označimo  $N_{\mathcal{U}}(v) = N(v) \cap \mathcal{U}$ . Poleg stopenj so *p-funkcije* npr. še:

$$p_S(v, \mathcal{U}) = \sum_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$p_M(v, \mathcal{U}) = \max_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_t(v, \mathcal{U}) = \frac{|\mathcal{L}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}(K(N^+(v)))|}{|\mathcal{L}(K(N^+(v)))|}$$

$$p_k(v, \mathcal{U}) = \text{števílo ciklov dolžine } k \text{ skozi vozlišče } v \text{ v } (\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{U}))$$

Podgraf  $\mathcal{H} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}(\mathcal{C}))$  porojen z množico  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$  je *p-sredica* na ravni  $t \in \mathbb{R}$  ntk.  $\forall v \in \mathcal{C} : t \leq p(v, \mathcal{C})$  in je  $\mathcal{C}$  maksimalna taka množica.





# Postopek za posplošene sredice

Funkcija  $p$  je *monotona* ntk. zanjo velja

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{V} : (p(v, \mathcal{C}_1) \leq p(v, \mathcal{C}_2))$$

Stopnje in funkcije  $p_S$ ,  $p_M$ ,  $p_t$  ter  $p_k$  so monotone.

Za monotone funkcije lahko ustrezno  $p$ -sredico na ravni  $t$  določimo, kot pri navadnih sredicah, z zaporednim odmetavanjem vozlišč z vrednostjo  $p$  manjšo od  $t$ . Sredice na različnih ravneh so gnezdene

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{t_2} \subseteq \mathcal{H}_{t_1}$$

$p$ -funkcija je *lokalna* ntk.  $p(v, \mathcal{U}) = p(v, N_{\mathcal{U}}(v))$ .

Stopnje,  $p_S$ ,  $p_M$  in  $p_t$  so lokalne; toda  $p_k$  ni lokalna za  $k \geq 4$ . Za lokalno  $p$ -funkcijo obstaja postopek reda  $O(m \max(\Delta, \log n))$  za določitev razslojitve na  $p$ -sredice, če le lahko  $p(v, N_C(v))$  določimo v času  $O(\deg_C(v))$ .



# Omrežje sodelovanj GeomBib

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

Iz B. Jones-ove bibliografija računalniške geometrije *Computational geometry database* (2002), *FTP*, *Geom.net*. smo sestavili omrežje sodelovanj. Avtorja določata povezavo, če sta napisala skupno delo. Utež povezave je enaka številu skupnih del.

To omrežje je zahtevalo veliko 'čiščenja' zaradi težav z razpoznavanjem posameznih avtorjev. Tako na primer: Pankaj K. Agarwal, P. Agarwal, Pankaj Agarwal in P.K. Agarwal določajo isto osebo.

$$n = 9072, m = 13567/22577 \rightarrow n' = 7343, m' = 11898.$$



# Sredice in posplošene sredice / ukazi Pajek

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče

```
File/Network/Read [Geom.net]
Network/Create Partition/k-Core/All
Info/Partition
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [13-*]
Draw/Network+First Partition
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Options/Values of lines/Similarities
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [21]
Draw/Network
Layout/Energy/Kamada-Kawai
Options/Values of lines/Forget
Layout/Energy/Kamada-Kawai
[select Geom.net]
Network/Create Vector/Generalized Cores/Sum/All
Info/Vector
Vector/Make Partition/by Intervals/Selected Thresholds [45]
Info/Partition
Operations/Network+Partition/Extract Subnetwork [2]
Draw/Network
Options/Values of lines/Similarities
Layout/Energy/Fruchterman-Reingold
```



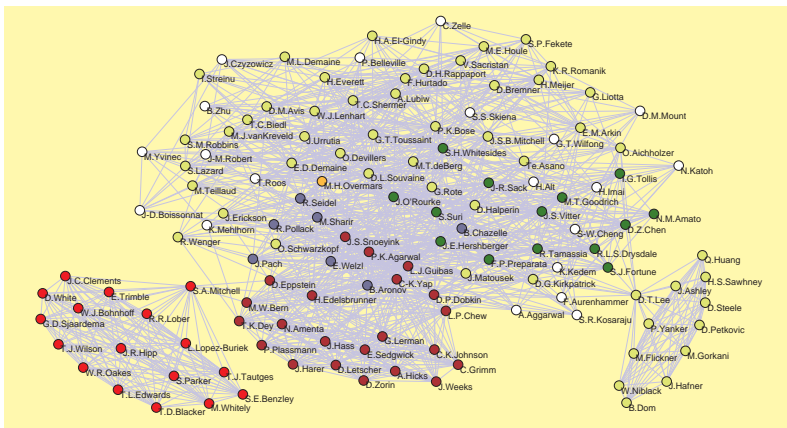
# Navadne sredice redov 10–21 v Computational Geometry

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče





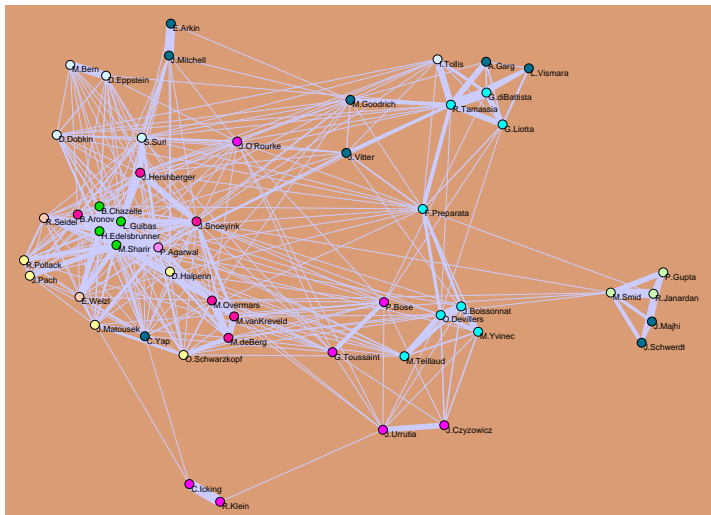
# $p_5$ -sredica na ravni 46 v Computational Geometry

Analiza omrežij

V. Batagelj

Otoki

Gruče



V. Batagelj

Analiza omrežij